VO Differentialgleichung 1 **Schriftliche Prüfung** 27.06.2024

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

Prüfer: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

Punkteverteilung:

Beispiel	1	2	3	4	5	6
Punkte	10	6	9	5	12	6

---

1. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\left(\tfrac{1}{x^2} + 2y^2\right)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0.$$

   (a) Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist.

   (b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor der Form $m(x, y) = m(x)$ und die Stammfunktion F der entstehenden Differentialgleichung.

   (c) Führen Sie die gegebene Differentialgleichung in eine Bernoulli Differentialgleichung der Form $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$ über und lösen Sie diese. Vergleichen Sie diese Lösung mit jener aus (b).

   (d) Geben Sie jenes Differentialgleichungssystem $z' = f(z)$, mit $z = (x, y)^\mathrm{T}$, an, das eine Lösungskurve besitzt, welche die Stammfunktion aus (b) erfüllt. Stellt diese Stammfunktion aus (b) eine Erhaltungsgröße dieses Differentialgleichungssystems dar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die skalare Differentialgleichung

$$\varphi'' + \alpha\varphi' + \sin(\varphi) = 0, \quad \alpha \geq 0.$$

   (a) Schreiben Sie die Differentialgleichung als System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

   an und bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.

   (b) Untersuchen Sie für $\alpha = 0$ die Stabilität der Ruhelagen mittels Linearisierung.

   (c) Zeigen Sie, dass

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + (1 - \cos(x_1))$$

   eine Ljapunov-Funktion des Systems ist und untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage $(x_1, x_2) = (0, 0)^\mathrm{T}$.

3. Betrachten Sie für $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x = x(t)$ die Differentialgleichung $x' = A(t)x$ zu gegebenen Anfangswert $x(0) = (-1,1)^{\mathrm{T}}$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2t^2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie eine Fundamentalmatrix der gegebenen Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten und lösen Sie das Anfangswertproblem.
   (b) Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Lösungen mit der Wronski-Determinante und verifizieren Sie die Aussage des Satzes von Liouville.
   (c) Bestimmen Sie die Stabilität der Differentialgleichung.

4. Betrachten Sie für $x = x(t) > 0$ und $y = y(t) > 0$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x' &= x - xy, \\ y' &= -y + xy. \end{aligned}$$

   (a) Argumentieren Sie, dass für einen gegebenen Anfangswert das zur Differentialgleichung gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.
   (b) Bestimmen Sie die Ruhelage und zeichnen Sie diese im gegebenen Vektorfeld, siehe Abbildung 1, ein.
   (c) Skizzieren Sie für $x(0) = 6$ und $y(0) = 6$ den Orbit im gegebenen Vektorfeld.
   (d) Ausgehend von Ihrer Kurve aus (c), skizzieren Sie den Verlauf von $x(t)$ und $y(t)$ über t.

5. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$Lu = -u'' + u = x, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

   mit $x \in [0,1]$.

   (a) Zeigen Sie, dass durch $\{\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung gegeben ist.
   (b) Konstruieren Sie durch Linearkombination der Lösungsbasis aus (a) ein neues Fundamentalsystem, welches die Randbedingungen im Sinne der Greenschen Funktion respektiert.
   (c) Überprüfen Sie die Lösbarkeit des inhomogenen Randwertproblems.
   (d) Bestimmen Sie die Greensche Funktion. Weisen Sie außerdem nach, dass diese alle Eigenschaften einer Greensche Funktion erfüllt.

6. Betrachten Sie für $\rho, \omega \in \mathbb{R}$, die skalare Differentialgleichung

$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = 0.$$

   (a) Transformieren Sie die skalare Differentialgleichung in ein System von Differentialgleichungen der Form $x' = Ax$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
   (b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und geben Sie alle möglichen Lösungsfälle an.
   (c) Untersuchen Sie die Stabilität des Systems aus (a) in Abhängigkeit der Parameter $\rho, \omega \in \mathbb{R}$.

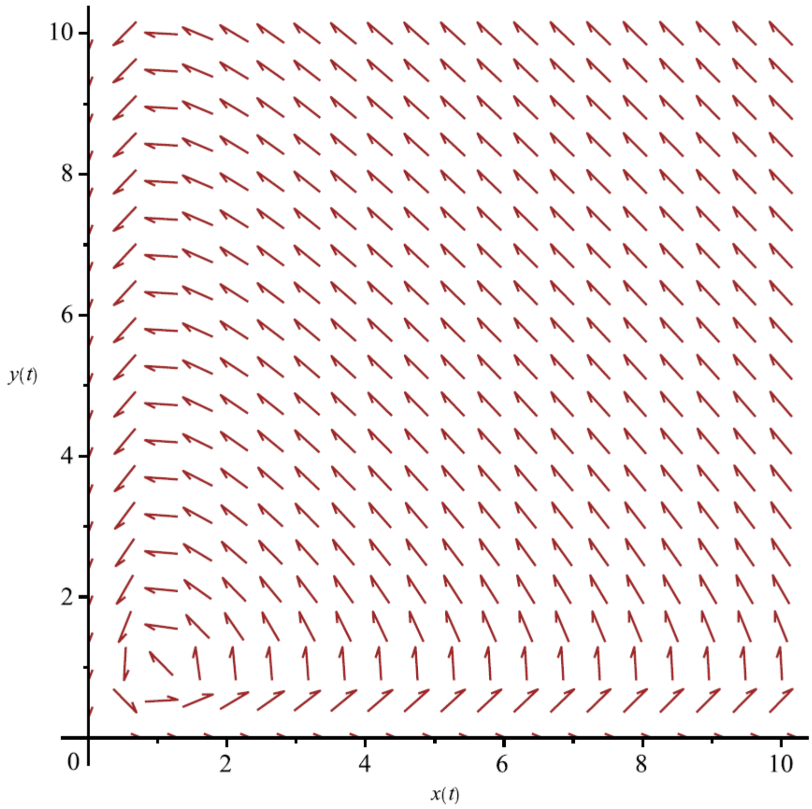

Abbildung 1: Vektorfeld zu Beispiel 4