Kurzfassung

Diese Arbeit widmet sich der Analyse der Fokker–Planck-Gleichungen aus der kinetischen Gastheorie. Diese Gleichungen sind hilfreich bei der Untersuchung des kollektiven Verhaltens von Vielteilchensystemen in verschiedenen Bereichen (z. B. Physik, Biologie, Elektrotechnik und Sozialwissenschaften). Wir untersuchen das Langzeitverhalten und hypoelliptische Regularisierungseigenschaften von Lösungen. Im Speziellen untersuchen wir die kinetischen Fokker–Planck-Gleichungen, das Vlasov–Poisson–Fokker–Planck-System und die relativistische kinetische Fokker–Planck-Gleichung. Für jede der betrachteten Gleichungen gibt es ein eindeutiges globales Gleichgewicht (oder einen stationären Zustand). Aufgrund der dissipativen Struktur dieser Gleichungen wird erwartet, dass die Lösungen im Laufe der Zeit gegen das entsprechende globale Gleichgewicht konvergieren. Wir beweisen diese Konvergenz und erhalten explizite und konstruktive Schätzungen der Konvergenzraten in Abhängigkeit vom Ausgangsdatum und den in den Gleichungen vorkommenden Parametern. Untersuchungen über das Konvergenzverhalten zum Gleichgewicht sind für Anwendungen in der Physik (z. B. Gleichgewichtsprozesse, numerische Simulationen) unerlässlich. Sie geben Auskunft über die Zeitskala der Konvergenz zum Gleichgewicht und damit über das qualitative Verhalten der Modelle sowie deren Gültigkeit. Unsere Beweistechnik basiert auf der Modifikation von Entropie-Entropie-Dissipationsansätzen, Hypokoerziviätsmethoden und der Konstruktion geeigneter Lyapunov-Funktionale.

Die Arbeit besteht aus vier Kapiteln. In Kapitel 1 wollen wir die Physik hinter den Fokker–Planck-Gleichungen, ihre Herleitung und ihr Langzeitverhalten vorstellen. In Kapitel 2 wird die kinetische Fokker–Planck-Gleichung mit einem Einschließungspotential analysiert. Wir entwickeln eine modifizierte Entropiemethode, mit der wir hypoelliptische Regularität von Lösungen und deren exponentielle Konvergenz zum stationären Zustand in einem gewichteten H^1-Raum mit expliziten konstruktiven Raten beweisen können. In Kapitel 3 wird für das nichtlineare Vlasov–Poisson–Fokker–Planck-System die Wohlgestelltheit, die hypoelliptische Regularität von Lösungen und deren Konvergenz zum stationären Zustand bewiesen. In Kapitel 4 wird die relativistische kinetische Fokker–Planck-Gleichung untersucht.

Abstract

This thesis is devoted to the analysis of the Fokker-Planck equations coming from the kinetic theory of gases. These equations arise in the study of the collective behavior of many-particle systems in various fields (e.g., physics, biology, electrical engineering, and social sciences). We study long time behavior and hypoelliptic regularizing properties. The main models of interest are *the kinetic Fokker-Planck equations, the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system,* and *the relativistic kinetic Fokker-Planck equation.* For each equation there is a unique global equilibrium (or steady state). Because of the dissipative structure of these equations, the solutions are expected to converge to the corresponding global equilibrium as time goes infinity. We prove this convergence and obtain explicit and constructive estimates on rates of convergence, in terms of the initial datum and the parameters appearing in the equations. Studies on the trend to equilibrium are essential for applications in physics (e.g., equilibration process, numerical simulations). They give information on the time scale for relaxation to equilibrium, and therefore on the qualitative behavior of the models as well as on their validity. The technique of our proofs is based on modification of entropy-entropy dissipation approaches, hypocoercivity methods, and construction of suitable Lyapunov functionals.

The thesis has four chapters. In Chapter 1, we aim to introduce the physics behind the Fokker-Planck equations, their derivation and long time behavior. Chapter 2 analyze the kinetic Fokker-Planck equation with a confining potential. We develop a modified entropy method which lets us prove exponential decay of solutions to the steady state in a weighted H^1 space with explicit constructive rates as well as hypoelliptic regularity. Chapter 3 is devoted to establish well-posedness, hypoelliptic regularity, and convergence to the steady state for the nonlinear Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system. Chapter 4 studies the relativistic kinetic Fokker-Planck equation.