Kurzfassung

Adaptive Finite-Element-Methoden (AFEMn) sind ein unverzichtbares Werkzeug für die effiziente numerische Simulation von partiellen Differentialgleichungen (PDG) mit einer Vielzahl von Anwendungen, insbesondere im Ingenieurwesen. Das Ziel besteht darin, eine zuverlässige numerische Approximation der unbekannten Lösung mit minimalen Rechenkosten zu berechnen. Diese Dissertation entwickelt adaptive Algorithmen zur effizienten Lösung von unsymmetrischen linearen elliptischen PDG zweiter Ordnung. Dazu verfeinern wir die adaptive Prozedur von Standard-AFEM: Berechne die Lösung der diskreten Formulierung und schätze den Approximationsfehler, markiere Dreiecke mit größerem Fehlerbeitrag und führe eine Verfeinerung des Gitters damit durch. Hierzu verwenden wir einen geschalteten iterativen Löser im `SOLVE`-Modul des adaptiven Algorithmus, der sich aus einer kontraktiven Symmetrisierung und der anschließenden Lösung dieses symmetrischen Problems mittels algebraischem Löser zusammensetzt. Hierbei ist es entscheidend, dass das Verfahren den Fehler in der zugehörigen Sobolev-Norm kontrahiert und der Löser lineare Komplexität aufweist. Die Abbruchkriterien werden so formuliert, dass sie die verschiedenen Fehlerkomponenten von Diskretisierung, Symmetrisierung und Algebra ausbalancieren. Diese Strategie garantiert volle R-lineare Konvergenz des Fehlers, d.h. im Wesentlichen Kontraktion eines geeigneten Quasi-Fehlers in jedem Schritt des Algorithmus. Eine hinreichend kleine Wahl der Parameter garantiert auch optimale Konvergenzraten bezüglich der Freiheitsgrade und Rechenkosten. Darüber hinaus wird die Methode auf zielorientierte adaptive Algorithmen erweitert, die die effiziente Berechnung eines Funktionalwertes der Lösung der PDG ermöglichen. Die Arbeit umfasst folgende Hauptbeiträge:

Zur iterativen Lösung der linearen Gleichungssysteme von symmetrischen PDG präsentieren wir ein neuartiges geometrisches Mehrgitterverfahren, welches robust in Bezug auf den Polynomgrad $p \geq 1$ und die (lokale) Netzweite h kontrahiert. Darüber hinaus wird bewiesen, dass der eingebaute algebraische Fehlerschätzer hp-robust äquivalent zum algebraischen Fehler ist und die Anwendung des Mehrgitterverfahrens auf symmetrische PDG optimale Komplexität garantiert.

Zweitens wird gezeigt, dass das kontraktive inexakte Lösungsverfahren für eine unsymmetrische PDG zu optimaler Komplexität des Algorithmus führt. Eine neue Beweisstrategie ermöglicht es, die bisherigen Einschränkungen an die Parameter in vorherigen Arbeiten abzuschwächen. Zudem wird der übliche Beweisschritt über eine (Quasi-)Pythagoras-Identität durch eine verallgemeinerte Quasi-Orthogonalität ersetzt. Insgesamt ebnet die neue Beweisstrategie den Weg für Erweiterungen der Analyse auf allgemeine inf-sup-stabile Probleme jenseits von Energieminimierungs-Problemen.

Schließlich wird ein zielorientierter adaptiver Algorithmus analysiert, der die effiziente Berechnung einer Zielgröße ermöglicht, die von der Lösung $u^\star$ einer unsymmetrischen PDG abhängt. Es wird eine zielorientierte adaptive iterativ symmetrisierte Finite-Element-Methode präsentiert und analysiert. Es wird gezeigt, dass der vorgeschlagene Algorithmus volle R-lineare Konvergenz und optimale Konvergenzraten hinsichtlich sowohl der Freiheitsgrade als auch der Rechenkosten garantiert.