

Kurzfassung

Checkerboard Pattern oder Schachbrettmuster sind Vierecksnetze, bei denen jede zweite Fläche ein Parallelogramm ist. Sie lassen sich leicht aus einem allgemeinen Vierecksnetz, dem so genannten Kontrollnetz, erzeugen indem man die Kantenmittelpunkte zu einem neuen Netz verbindet. Checkerboard Pattern haben sich bereits bei verschiedenen Anwendungen in der geometrischen Modellierung oder in der Architektur als sehr nützlich erwiesen, was darauf hindeutet, dass hinter diesem Ansatz mehr steckt als nur gute numerische Näherungseigenschaften. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine diskrete differentialgeometrische Theorie für Checkerboard Pattern zu entwickeln.

Wir legen einen besonderen Schwerpunkt auf das Transformationsgruppenprinzip, das besagt, dass die diskreten Strukturen unter denselben Transformationen invariant sein sollten wie ihre Gegenstücke aus der glatten Differentialgeometrie. Es wird eine Krümmungstheorie für Checkerboard Pattern entwickelt, die auf einer neuen Definition des Shapeoperators beruht. Dieser stückweise lineare Operator bildet die Parallelogramme in einem Checkerboard Pattern auf die entsprechenden Parallelogramme in seinem Gaußbild ab.

Wir definieren konjugierte, orthogonale und Hauptkrümmungs-Checkerboard Pattern. Es zeigt sich, dass diese konsistent mit der entwickelten Krümmungstheorie sind. Konjugierte Netze bleiben bei projektiven Transformationen, die auf das Kontrollnetz angewendet werden, erhalten. Orthogonale Checkerboard Pattern können mit Sphärenkongruenzen von einander orthogonal schneidenden Sphären identifiziert werden. Möbiustransformationen können auf diese Sphären angewandt werden, wobei die Orthogonalität und die Klasse der Hauptkrümmungs-Checkerboard Pattern erhalten bleiben.

Rhombische Checkerboard Pattern werden unter einem anderen Gesichtspunkt beleuchtet als die übrigen Checkerboard Pattern. Hier wird die Orthogonalität des Kontrollnetzes durch die Eigenschaft des eingeschriebenen Checkerboard Pattern charakterisiert, dass alle Parallelogramme Rhomben sind. Diese Art Orthogonalität zu definieren ist speziell für Anwendungen interessant, da sie sich leicht mit weiteren Eigenschaften von Vierecksnetzen kombinieren lässt und gut geeignet für Optimierungsalgorithmen ist. Aus theoretischer Sicht sind orthogonale Multi-Netze interessant, also Netze, bei denen jedes kombinatorische Rechteck orthogonal ist. Die Existenz solcher Netze in der Ebene folgt aus dem Satz von Ivory. Wir erweitern den Satz von Ivory auf orthogonale Multi-Netze im Raum.

Eine weitere Klasse von Checkerboard Pattern stellen die sogenannten Koenigs Checkerboard Pattern dar. Bei dieser Diskretisierung der glatten Koenigs Netze liegen die sechs Fokalfunkte, die jedem Viereck eines konjugierten Checkerboard Pattern zugeordnet werden können, auf einem Kegelschnitt. Mit Fokalfunkten sind hier die Schnittpunkte der Trägergeraden gegenüberliegender Kanten in einem Viereck gemeint. Zwei Checkerboard Pattern lassen sich auf natürliche Weise als dual definieren, wenn korrespondierende Parallelogramme kantenparallel und ähnlich, aber mit gegengleicher Orientierung sind. Es zeigt sich, dass genau die Koenigs Checkerboard Pattern die dualisierbaren sind analog zur glatten

Theorie. Auf den Diagonalen des Kontrollnetzes eines konjugierten Netzes lassen sich diskrete Laplace Invariante definieren als das Doppelverhältnis der Eckpunkte und Fokalpunkte. Wie in der glatten Theorie können Koenigs Checkerboard Pattern als jene konjugierten Checkerboard Pattern charakterisiert werden, bei denen die zwei Laplace Invarianten in jedem Viereck des Kontrollnetzes übereinstimmen. Daraus folgt sofort, dass die Klasse der Koenigs Checkerboard Pattern invariant unter projektiven Transformationen angewandt auf das Kontrollnetz ist.

Abschließend betrachten wir isotherme Checkerboard Pattern als die Kombination aus Hauptkrümmungs- und Koenigs Checkerboard Pattern. Die Klasse der isothermen Checkerboard Pattern bleibt sowohl unter Dualisierung als auch unter Möbiustransformationen erhalten. Damit lassen sich diskrete Minimalflächen aus ebenen isothermen Checkerboard Pattern erzeugen. Zuerst werden die Checkerboard Pattern mit einer Möbius Transformation auf die Einheitssphäre abgebildet. Dualisiert man das entstandene isotherme Checkerboard Pattern auf der Einheitssphäre, erhält man eine diskrete Minimalfläche.